Durée : 3 H

- I -

Dans cette partie nous considérons une série numérique de terme général strictement positif u_n , $n \in \mathbb{N}$, défini à partir du rang n_0 et de somme partielle associée de rang $n \geq n_0$ $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

1) Supposant l'existence d'une suite (b_n) , $n \in \mathbb{N}$, de nombres réels strictement positifs, d'un entier naturel $n_1 \geq n_0$ et d'un réel K strictement positif vérifiant l'inégalité :

$$b_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1} > K \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_1,$$

établir l'existence d'un réel M, que l'on exprimera en fonction de K, b_{n_1} et u_{n_1} , tel que pour tout $n \geq n_1$ l'on ait $U_n < M$.

Que peut-on en conclure pour la suite (U_n) et pour la série de terme général u_n ?

2) Supposant l'existence d'une suite (b_n) , $n \in \mathbb{N}$, de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général $\frac{1}{b_n}$ soit divergente et d'un entier naturel $n_1 \geq n_0$ vérifiant l'inégalité $b_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1} < 0$ pour tout $n \geq n_1$, que peut-on conclure pour la nature de la série de terme général u_n ?

3) Déduire de ce qui précède un critère d'étude de la série de terme général u_n lorsque $b_n = n$.

Dans la suite de cette première partie, nous nous plaçons dans le cas particulier où la quantité $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ admet une limite finie ℓ lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right).$$

4) Que peut-on alors dire de $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$?

Le critère de d'Alembert vous permet-il de déterminer la nature de la série de terme général u_n lorsque :

a) $\ell < 0$, pourquoi ?

b) $\ell \geq 0$, pourquoi ?

5) Démontrer que les résultats établis dans les questions antérieures permettent de déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

a) $\ell > 1$.

b) $\ell < 1$.

c) $\ell = 1^-$, c'est-à-dire 1 atteint par valeurs inférieures.

- II -

Soit (E) l'équation différentielle linéaire (E) $x\,(4 - x)\,y' + (2 - x)\,y - 1 = 0$.

1) a/ Supposant que la fonction somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$ est solution de (E) dans un intervalle de centre 0, déterminer la valeur de a_0 et la relation liant pour tout entier $n \geq 1$ les coefficients a_n et a_{n-1}.

b/ Déterminer l'unique série entière dont les coefficients vérifient les conditions précédentes.

c/ Déterminer le rayon de convergence R de cette série.

2) Posons $v_n = a_n\,(-R)^n$ et $w_n = a_n\,R^n$.

a) Montrer que w_n peut se mettre sous la forme du produit $w_n = A \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + t_k}$ où A et t_k sont des réels à déterminer.

Déterminer la nature de la suite de terme général $Ln(w_n)$ puis la limite de la suite (w_n).

b) Préciser la nature de la série de terme général v_n.

c) Etudier la nature de la série de terme général w_n en utilisant les résultats du I.

3) Donner pour la série entière du II-1) :

a) Le plus grand intervalle de convergence.

b) Le plus grand intervalle de convergence absolue.

4) En déduire l'existence d'une fonction f, développable en série entière sur un intervalle à préciser, qui soit solution de (E) sur cet intervalle.

- III -

1) a/ A tout réel x de l'intervalle $]0,4[$ on associe l'intégrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{u\ (4-u)}}.$$

Montrer que cette intégrale converge et admet une limite finie lorsque x tend vers 4. Calculer cette intégrale et la mettre sous la forme $F(x) = \alpha\ Arc\sin\ [\ \phi(x)\ ]$ en déterminant le réel α et la fonction ϕ.

b/ Donner une représentation, valable sur l'intervalle $]0,4[$, de la solution générale de (E).

c/ Démontrer qu'il existe une solution unique y_1 de (E) sur $]0,4[$ admettant une limite finie au point 0 et exprimer cette solution à l'aide de F.

2) On étudie dans cette question les solutions de (E) dans $]-\infty,0\ [$, dans ce but on introduit l'intégrale,

$$G(x) = \int_x^0 \frac{du}{\sqrt{u\ (u-4)}}.$$

a) Etudier la convergence de cette intégrale et calculer $G(x)$ que l'on mettra sous la forme $G(x) = \beta\ Argsh\ [\ \psi(x)\ ]$ en précisant le réel β et la fonction ψ.

b) Donner sur l'intervalle $]-\infty,0\ [$ une expression générale des solutions de (E).

c) Démontrer qu'il existe une solution unique y_2 de (E) dans $]-\infty,0\ [$ admettant une limite finie au point 0 et exprimer cette solution à l'aide de G.

3) Donner une représentation, valable pour $x \in\ ]4,+\infty[$, de la solution générale de (E).

- IV -

On se propose de chercher s'il existe des solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

1) a/ Déterminer les valeurs de la dérivée à droite de y_1 en $x = 0$ et de la dérivée à gauche de y_2 en $x = 0$.

b/ Prouver alors qu'il existe sur l'intervalle $]-\infty,4\ [$ une solution g de (E) dont la restriction à l'intervalle $]-4,4\ [$ est égale à f.

2) Montrer qu'il existe une solution unique h de (E) sur $]\ 0,+\infty\ [$. Pour cela on utilisera le changement de variable $t = 4 - x$.

3) Etudier l'existence de solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.